1. ea, (Σ 5 ó) (2017/18 őszi félév) ①

Adott egy VK ehhez tartozik egy u.n. valószínűségi tér: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

ahol $\Omega := \{$a VK összes lehetséges kimenetele$\} \equiv \{$az elemi események$\}$

Ω lehet véges elemű, vagy ∞ elemű, $(\Omega = \{\omega_i \mid i\})$, alaphalmaz

$\mathcal{A} :=$ a VK-tal kapcsolatos $\forall$ megfigyelhető esemény halmaza

$\mathcal{A} = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$ eseménytér, $\mathcal{A}$ tul. i:

$\bar{A} := \Omega \setminus A$

$\mathcal{A}$ σ-algebra

$$\left(\begin{array}{l} \Omega, \phi \in \mathcal{A} \\ A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A+B, A \cdot B, A \setminus B, B \setminus A, \bar{A} \in \mathcal{A} \\ A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_i A_i \in \mathcal{A} \text{ és } \prod_i A_i \in \mathcal{A} \end{array}\right)$$

$P : \mathcal{A} \to [0,1]$ valószínűségi mérték, $P(A) \sim$ az A valószínűsége

P tul. i:
- I. axióma: $P(A) \geq 0$
- II. –"– $P(\Omega) = 1$
- III. –"– $P(\sum A_i) = \sum P(A_i)$ feltéve, h. A_i-k diszjunktak!

igazolható, h.
$P(\phi) = 0$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
ha $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
$P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$

P meghatározása
- statisztikai valószínűség: $P(A) \approx h_n(A)$ (relatív gyakoriság)
- geom. i val.
- klasszikus/Laplace valószínűség ($|\Omega| = n$, $\forall \omega_i$-re $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$)

kombinatorika elemei

sorbarendezés / permutáció
- ism. nélkül
- ismétléses

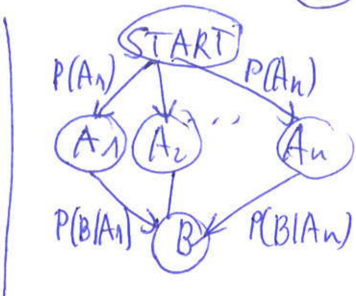
kiválasztás (n-ből k-t) (n különb.)

	ismétlés nélkül	ismétléses
sorrend nem számít (kombin.)	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$
sorrend számít (variáció)	$\binom{n}{k} \cdot k!$	n^k

feltételes val.: $P(A|B) := \frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$

teljes val. tétel: $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer, B tetsz. esemény $\Bigg\} \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)\cdot P(A_i)$$



Bays formula: $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$

Események sztoch. fgtlenek, ha

a, $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$, illetve

b, $P\left(\prod_{i_j} A_{i_j}\right) = \prod_{i_j} P(A_{i_j})$ $\quad\forall \{i_1 .. i_k\}\subset\{1,2,..,n\}$ esetén

(VV) Véletlen változó: $X:\Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega_i)\in\mathbb{R}$

ha Ék $X = \{x_1,..,x_n\}$ véges elemű, akk. X diszkrét VV

ha Ék $X = [a,b]$ intervallum $\Rightarrow$ X folytonos VV

$\boxed{\text{X diszkrét}} \Rightarrow f: \text{Ék}X \to [0,1]$

$f(x_i) := P(X=x_i)$ valószínűség-/sűrűségfv.

$F: \mathbb{R}\to[0,1]$, $F(x) := P(X\le x)$ eloszlásfv. $\Big\}$ X-hez

Tul.:

1, $\sum_{x_i\in \text{Ék}X} f(x_i) = 1$

2, $P(a\le X\le b) = \sum_{a\le x_i\le b} f(x_i)$

3, F monoton nő, jobbról folyt. fv. (lépcsős fv.)

4, $\lim_{-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{+\infty} F(x) = 1$

X folyt.: $X: \Omega \to [a,b]$, $\exists f \ge 0$,

$$F(x) := P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$, f sűrűségfv., F eloszlásfv.

Tul.:

1, $f(x)\ge 0 \quad \forall x$

2, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

3, $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = 0$

4, $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$

5, $F'(x)=f(x)\ge 0$ $\forall$ x-re, ahol f folyt.

Áll.: X folyt. $\Rightarrow$

1, $P(a<X\le b)=P(a\le X<b)=P(a\le X\le b)=P(a<X<b)=F(b)-F(a)$

2, $P(X=a)=0$

Véletlen változók jellemző paraméterei

Várható érték: X diszkrét $\Rightarrow E(X)=\sum x_i f(x_i)$

(μ) X folyt. $\Rightarrow E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx$

X diszkrét, g folyt. fv. $\Rightarrow g(X)$ is diszkrét VV és $E(g(X))=\sum g(x_i)\cdot f(x_i)$

X folyt., g folyt. fv. $\Rightarrow g(X)$ folyt. VV és $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$

Várható érték tul.-i (X lehet diszkrét vagy folyt.)

1, $E(a)=a$

2, $E(aX)=a\cdot E(X)$

3, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ (lineáris)

4, ha X, Y sztoch. ftlen $\Rightarrow E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$

Variancia: $Var(X):=E((X-E(X))^2)=\sigma^2$

$$\left(\begin{array}{l} X \text{ diszkrét} \Rightarrow Var(X)=\sum (x_i-\mu)^2\cdot f(x_i) \\ X \text{ folyt.} \Rightarrow Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)\,dx \end{array}\right)$$

$\sigma:=\sqrt{Var(X)}$ szórás

variációs együttható: $v=\dfrac{\sigma}{\mu}$

Variancia tul.-i

1, $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ (így számítjuk ki)

2, $Var(aX+b)=a^2\cdot Var(X)$, $Var(aX)=a^2\cdot Var(X)$

3, $Var(aX\pm bY)=a^2 Var(X)+b^2 Var(Y)$

Standardizálás: X tetsz. VV

$Z:=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow E(Z)=0$ és $Var(X)=1$

Momentumok

1, k. momentum: $\alpha_k := E(X^k)$

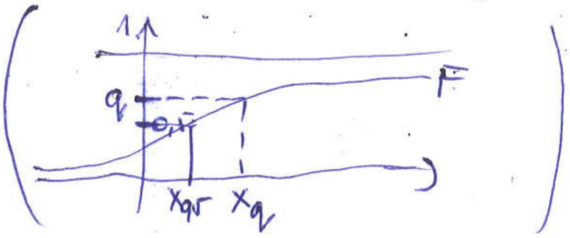
2, k. abszolút momentum: $E(|X|^k)$

3, k. centrális momentum: $\beta_k := E((X-\mu)^k)$

4, k. centrális abszolútmomentum: $E(|X-\mu|^k)$

q – kvantilis: x_q, ha $q \in (0,1)$ esetén $F(x_q) = P(X \le x_q) = q$

(azaz ha X folyt. $\Rightarrow \int_{-\infty}^{x_q} f(t)\,dt = q$)



ha $q = 0{,}5 \Rightarrow x_{0,5}$ ~ a medián

ferdeség: $\gamma := \frac{\beta_3}{\sigma^3} = \frac{E((X-\mu)^3)}{\left(\sqrt{Var(X)}\right)^3}$

(ha $\gamma > 0 \Rightarrow f$ jobbra
ha $\gamma < 0 \Rightarrow f$ balra elnyúló fv.)

lapultság: $\varkappa := \frac{\beta_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E((X-\mu)^4)}{(Var(X))^2} - 3$

Csebisev egyenlőtlenség:

X tetsz. VV $\Rightarrow P(|X-\mu| \ge c) \le \frac{Var(X)}{c^2}$ $\quad \forall c > 0$

(Tetsz. VV várható értéke és varianciája közti öf.)

—o—

Levelező | 1. HF / 2017/18 őszi félév / Stat. II. (nov. 5.-ig) 1

1. VK: 1 kockával 2x dobunk egymás után.

a) $\Omega = ?$, $|\Omega| = ?$

b) A := a dobott számok összege 5
B := a dobott számok mindegyike négyzetszám
C := az első dobás eredménye 3-mal osztható, a második páros szám
D := a két dobott szám különbségének abszolút értéke 2

Adja meg A, B, C, D-t

c) Írja le: $A+B$, $B+D$, $D \setminus A$, $C \setminus B$, $\overline{C}$, $C \cdot D$, $\overline{A} \cdot D$, $A \cdot \overline{C}$, $\overline{C+D}$, $\overline{A \cdot C}$

d) $P(A), P(B), P(C), P(D) = ?$ Mely események diszjunktak?

e) igaz-e, hogy B és C események sztoch. függetlenek?

---

2. Mutassa meg, hogy ha $P(A) \geq 0{,}7$ és $P(B) \geq 0{,}9 \Rightarrow P(AB) \geq 0{,}6$

3. Mutassa meg, h. ha $P(A) = P(B) = 0{,}5$ akkor $P(AB) = P(\overline{A} \cdot \overline{B})$

4. Ha $P(A+B) = 0{,}7$ és $P(A) = 0{,}21$, $P(AB) = 0{,}12 \Rightarrow P(B) = ?$

5. Ha $P(A|B) = 0{,}21$, $P(AB) = 0{,}063$, $P(A+B) = 0{,}5$ $\Rightarrow P(B) = ?$, $P(A) = ?$, $P(A \setminus B) = ?$, $P(B \setminus A)$

---

6. Dobjon fel egy 200Ft-os érmét 50-szer. Adja meg az írás (statisztikai) valószínűségét!

---

7. Egy 80 cm sugarú körlemezre lövünk éjjel. Tegyük fel, hogy minden pontot ugyanolyan eséllyel találunk el. Mekkora a (geometriai) valószínűsége annak, hogy a belső 10 cm-sugarú körlemezt találjuk el?

---

8. VK: 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből 5 jegyű számokat készítünk ∀ lehetséges módon. (∀ jegy csak egyszer használható!) Egy 5 jegyű számot véletlenszerűen kiválasztunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az a szám

a) páros
b) osztható 5-tel
c) a második jegye 0 ?

---

*14. Egy dobozba csavarokat töltünk, átlag 1000 db-t. A dobozbeli csavarok számát X VV adja, amely szórása 10. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobozba került csavarok db száma 950 és 1050 között van? (Csebisev egyenlőtl.)

(9.) Egy gyár 4 férfi és 4 női munkást akar felvenni. Felvételre 5 férfi és 8 nő (2) jelentkezett. Hányféleképpen választhatják ki a felveendő munkásokat?

(10.) 100 csavar közül, amelyek között 10 selejtes, kiválasztunk 5 db-t.

a, Hányféleképpen lehetséges ez?

b, Hány olyan eset van, amelyben minden kiválasztott csavar hibátlan?

c, Hány olyan eset van, amelyben 3 csavar jó és 2 selejtes?

d, Tekintsünk egy tetsz. kiválasztást, mekkora annak a valószínűsége, h

(i) mind hibás,

(ii) 4 csavar jó és csak 1 hibás?

(11.) Tudjuk (statisztikai adatok alapján) hogy a lakosság 0,1%-a szenved TBC-ben. A ténylegesen TBC-s betegek tüdőszűrővizsgálata 94%-os valószínűséggel pozitív lesz, azaz megállapítja a betegséget. Az egészséges személyek 1%-ban is pozitív a tüdőröntgen eredménye (pl. filmhiba)

a, Mekkora annak a valószínűsége, h. egy tetsz. személy tüdőröntgen vizsgálata pozitív?

b, Mekkora a val. e, h. ténylegesen beteg, habár az eredmény negatív?

c, -"- -"- , h. egészséges, habár az eredmény pozitív?

(teljes val. tétel, Bayes formula)

(12.) Legyen X diszkrét v.v.

x_i	-1	-2	1	3	4
p_i	0,15	0,05	0,2	p	0,25

a, $p=?$

b, f, F-t rajzolja fel!

c, $P(X<2{,}8)=?$

d, $P(X>-2{,}3)=?$

e, $P(-1\leq X\leq 1{,}5)=?$

f, $E(X)=?$, $Var(X)=?$, $\sigma=?$

g, $\gamma=?$, $Exz=?$

(13.) $f(x)=\begin{cases} A(x+0{,}5), & \text{ha } 0\leq x\leq 1 \\ 0, & \text{kül.} \end{cases}$

a, $A=?$ ha f sűrűségfv. f-t rajzolja fel!

b, $F(x)=?$ rajzolja fel!

c, $P(0<X<0{,}3)=?$

d, $E(X)=?$, $Var(X)=?$, $\sigma=?$

e, $\gamma=?$

(*)