1. HF Megoldás / Gazd. Mat. / 2017/18. 1. félév / N+L

(1) $\lim \frac{200}{n\sqrt{n}} = 200 \cdot \lim \frac{1}{n^{1.5}} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$ | $\lim \frac{\sqrt[3]{n}}{10^6} = \frac{1}{10^6} \cdot \lim n^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{+\infty}}$

$\lim \frac{3n+2}{100-n} = \lim \frac{3 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}}{\underbrace{\frac{100}{n}}_{\to 0} - 1} = \underline{\underline{-3}}$; $\lim \frac{2n+1}{n^2-5} = \lim \frac{\underbrace{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}_{\to 0}}{1 - \underbrace{\frac{5}{n^2}}_{\to 0}} = \underline{\underline{0}}$

$\lim \frac{(2n+1)(2n-1)}{1+2+\dots+n} = \lim \frac{4n^2-1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim \frac{8n^2-2}{n^2+1} = \lim \frac{8 - \underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} = \underline{\underline{8}}$

$\lim \frac{n^3-1}{(n-1)^3} = \lim \frac{\cancel{(n-1)}(n^2+n+1)}{(n-1)^{\cancel{3}2}} = \lim \frac{n^2+n+1}{n^2-2n+1} = \lim \frac{1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}_{\to 0}}{1 - \underbrace{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}_{\to 0}} = \underline{\underline{1}}$

$\lim \frac{n^3+1}{(n+1)^2 \cdot 2n} = \lim \frac{n^3+1}{2n^3+4n^2+2n} = \lim \frac{1 + \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0}}{2 + \underbrace{\frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}_{\to 0}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$\lim \frac{n^4+3n^2}{(n^2+1)^2} = \lim \frac{n^4+3n^2}{n^4+2n^2+1} = \lim \frac{1 + \underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}_{\to 0}} = \underline{\underline{1}}$

(2) $\lim \frac{1000-3^{2n}}{9^{n+1}+4^n} = \lim \frac{1000-9^n}{9 \cdot 9^n + 4^n} = \lim \frac{1000 \cdot \underbrace{\frac{1}{9^n}}_{\to 0} - 1}{9 + \underbrace{\left(\frac{4}{9}\right)^n}_{\to 0}} = \underline{\underline{\frac{-1}{9}}}$

$\lim \frac{2^n \cdot 3^{n+1}+20}{5^{n+2}-10} = \lim \frac{3 \cdot 6^n + 20}{25 \cdot 5^n - 10} = \lim \frac{3 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^n + \underbrace{20 \cdot \frac{1}{5^n}}_{\to 0}}{25 - \underbrace{\frac{10}{5^n}}_{\to 0}} = \underline{\underline{+\infty}}$

(u.is $\left(\frac{6}{5}\right)^n \to +\infty$)

$\lim \frac{16^{\frac{n}{2}+1} - 2^{3n}}{2 \cdot 8^{n-1} + (2^n)^2} = \lim \frac{16 \cdot 4^n - 8^n}{\frac{2}{8} \cdot 8^n + 4^n} = \lim \frac{\underbrace{16\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0} - 1}{\frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}} = \underline{\underline{-8}}$

3, $\lim \sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim \sqrt{n}\cdot\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\overbrace{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}^{=n+1-n=1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} =$

$= \lim \frac{\sqrt{n}(\cancel{n}+1-\cancel{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \overset{1:\sqrt{n}}{\underset{1:\sqrt{n}}{=}} \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{n} \to 0$)

$\lim \frac{200}{(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})\cdot\sqrt{n}} = 200\cdot\lim\frac{(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})}{\underbrace{(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})\cdot(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})}_{2n-(2n-1)=1}\cdot\sqrt{n}} =$

$= 200\cdot\lim\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} = 200\cdot\lim\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right) = 200\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 400\cdot\sqrt{2}$ ($\frac{1}{n} \to 0$)

$\lim 3^{\frac{1}{n}} = 3^0 = 1 \qquad \left(\frac{1}{n}\to 0\right)$

Geometriai sor összege (minden összeg $n=0$-tól indul)

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+1}\cdot 3^{2-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot 4^n\cdot\frac{9}{3^n} = 18\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty \quad \left(\frac{4}{3}>1\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty} 6^{n+2}\left(4^{1-\frac{n}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 36\cdot 6^n\left(\frac{4}{2^n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 36\cdot 6^n\cdot\frac{1}{2^n}\cdot 4{,}5 =$

$= 36\cdot 4{,}5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{2}\right)^n = 162\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = +\infty$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{25}^{\,1-n}}{3^{-n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^n}} = 15\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 15\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{15\cdot 5}{2} = 37{,}5$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^{2n+4}}{16^{\frac{n}{2}+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot 2^n}{16\cdot 4^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{27^{\frac{n}{3}+1}-9^{\frac{n}{2}+1}}{49^{\frac{n}{2}+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{27\cdot 3^n-9\cdot 3^n}{49\cdot 7^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{18\cdot 3^n}{49\cdot 7^n} = \frac{18}{49}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n$

$= \frac{18}{49}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\underset{7}{\cancel{49}}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{4}2} = \frac{9}{14} \approx 0{,}64$

Differencia egyenletek

(a) $y_{n+1} = \overset{a}{0{,}5}\, y_n + \overset{b}{5}$

$y_0 = 0{,}9$

$$y_n = 0{,}5^n \underbrace{\left(0{,}9 - \frac{5}{1-0{,}5}\right)}_{0{,}9-10=-9{,}1} + \overbrace{\frac{5}{1-0{,}5}}^{10} = -9{,}1\cdot 0{,}5^n + 10$$

$$\lim y_n = \lim(-9{,}1 \underset{\to 0}{0{,}5^n} + 10) = 10$$

(A sorozat néhány tagja:

$y_0 = 0{,}9 \quad y_1 = 9{,}45, \ y_2 = 9{,}725, \ y_3 = 9{,}8625 \ldots \ y_{10} \cong 10 - 0{,}0088 = 9{,}9912$)

(b) $x_{n+1} = \overset{a}{0{,}75}\, x_n + \overset{b}{2}$

$x_0 = 1$

$$x_n = (0{,}75)^n \underbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{2}{1-0{,}75}}^{8}\right)}_{-7} + \overbrace{\frac{2}{1-0{,}75}}^{8} = -7\cdot 0{,}75^n + 8$$

$$\lim x_n = \lim(-7 \cdot \underset{\to 0}{0{,}75^n} + 8) = 8$$

(A sorozat néhány tagja:

$x_1 = 0{,}75 + 2 = 2{,}75, \ x_2 = 4{,}0625, \ x_3 \cong 3{,}5468 \ldots \ x_{10} \cong 8 - 0{,}39 = 7{,}61$)

(c) $y_{n+1} = \overset{a}{-0{,}75}\, y_n + \overset{b}{7}$

$y_0 = 1$

$$y_n = (-0{,}75)^n \cdot \underbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{7}{1+0{,}75}}^{4}\right)}_{-3} + \overbrace{\frac{7}{1{,}75}}^{4} = 4 - 3(-0{,}75)^n$$

$$\lim y_n = \lim(4 - 3\underset{\to 0}{(-0{,}75)^n}) = 4$$

(A sorozat néhány tagja:

$y_1 = 7 - 0{,}75 = 6{,}25, \ y_2 = 7 - 4{,}6875 = 2{,}3125, \ y_3 \cong 7 - 1{,}73 = 5{,}27$, stb.

a sorozat "ugrálva" /alulról és felülről közelíti a 4-t)

(d) y_n – jelölje az n. évben a maradék adósságot

$y_0 = 40.000$ eu

$y_1 = 40.000 \cdot 1{,}12 - 8000 = 44\,800 - 8000 = 36.800, \quad y_1 = y_0 \cdot 1{,}12 - 8000$

$y_2 = 36800 \cdot 1{,}12 - 8000 = 41216 - 8000 = 33.216 \quad\quad y_2 = y_1 \cdot 1{,}12 - 8000$

$\vdots$ stb.

Látható a "törlesztő" egyenlet:

$$y_{n+1} = y_n \cdot 1{,}12 - 8000 \quad , \text{tehát} \quad a = 1{,}12$$
$$b = -8000$$

$$y_n = (1{,}12)^n \cdot \left(40.000 - \frac{-8000}{1-1{,}12}\right) + \frac{-8000}{\underbrace{1-1{,}12}_{-0{,}12}} = (1{,}12)^n \cdot (40.000 - 66.666{,}667) +$$

$$+ 66.666{,}667 = 66.666{,}667 - 26.666{,}67 \cdot (1{,}12)^n$$: az adósság n év múlva

a törlesztés akkor jár le, ha $y_n = 0$, azaz

$$66666{,}667 = 26666{,}67 (1{,}12)^n$$
$$2{,}49 \simeq 1{,}12^n$$
$$\ln 2{,}49 = n \cdot \ln 1{,}12 \quad , \quad n = \frac{\ln 2{,}49}{\ln 1{,}12} \simeq \frac{0{,}912}{0{,}113} \approx 8{,}07 \approx 8$$

Tehát a törlesztés 8 év múlva jár le.

---

e) y_n a madarak száma n év múlva

lépés $y_0 = 20$

$$y_1 = 20 \cdot 1{,}2 + 20 = 44 \qquad y_1 = y_0 \cdot 1{,}2 + 20$$
$$y_2 = 44 \cdot 1{,}2 + 20 = 48{,}8 \qquad y_2 = y_1 \cdot 1{,}2 + 20$$

Tehát $\boxed{\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n \overset{a}{1{,}2} + \overset{b}{20} \\ y_0 = 20 \end{array}}$ $\quad y_n = (1{,}2)^n \left(20 - \frac{20}{\underbrace{1-1{,}2}_{-0{,}2}}\right) + \overbrace{\frac{20}{1-1{,}2}}^{-100} = (1{,}2)^n \cdot 120 - 100$

$$y_5 = (1{,}2)^5 \cdot 120 - 100 \simeq 298 - 100 = 198$$

5 év múlva kb. 198 madár van. (ha azt tesszük fel, h. a 0. évben 20 volt)

---

kiindulhattunk volna abból, h. a 0. évben 0 madár van:

$y_0 = 0$

$y_1 = 20$

$y_2 = 20 \cdot 1{,}2 + 20 = 44$ csak innentől u. az a sorozat, azaz a képlet csak innen alkalmazható, tehát akkor 6 év múlva lesz 198 madár, 5 év múlva csak

$y_3 = 44 \cdot 1{,}2 + 20 = 48{,}8$

stb.

$$(1{,}2)^4 \cdot 120 - 100 = 148{,}8 \approx 149 \text{ madár van}$$

Mindkét megoldás jó.

f) (i) $y_0 = 1120$

$y_1 = 1120 \cdot 1{,}15 - 120 = 1288 - 120 = 1168$

$y_2 = 1168 \cdot 1{,}15 - 120 = 1223{,}2 \approx 1223$

⋮

y_n legyen az n. év végi bálnák száma

látható az egyenlet: $y_{n+1} = y_n \cdot \overset{a}{1{,}15} - \overset{b}{120}$

$$y_n = (1{,}15)^n \cdot \left(1120 - \underbrace{\frac{-120}{1-1{,}15}}_{800}\right) + \underbrace{\frac{-120}{1-1{,}15}}_{800} = (1{,}15)^n \cdot 320 + 800$$

n év múlva y_n bálna lesz

5 év múlva: $y_5 = (1{,}15)^5 \cdot 320 + 800 \cong 1443{,}6 \approx 1444$

ezen méretű bálnavadászat mellett még nő az egyedszám

(ii) $y_0 = 1120$

$y_1 = 1120 \cdot 1{,}15 - 200 = 1088$

$y_2 = 1088 \cdot 1{,}15 - 200 \cong 1051{,}2 \approx 1051$

⋮

$y_{n+1} = y_n \cdot \overset{a}{1{,}15} - \overset{b}{200}$

$$y_n = (1{,}15)^n \cdot \left(1120 - \underbrace{\frac{-200}{1-1{,}15}}_{1333}\right) + \underbrace{\frac{-200}{1-1{,}15}}_{\approx 1333} \cong 1333 - 213 \cdot (1{,}15)^n$$

$n = 5$ $\quad y_5 = 1333 - \underbrace{213(1{,}15)^5}_{428} = 905$

Látható, hogy az évi 200 kilövés esetén az egyedlétszám egyre csökken.

Ha n év múlva kihal a csoport, $y_n = 0$

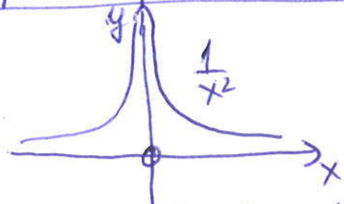
$1333 = 213 \cdot (1{,}15)^n$ $\qquad \ln 6{,}258 = n \cdot \ln 1{,}15$

$6{,}258 = (1{,}15)^n$ $\qquad n = \frac{\ln 6{,}258}{\ln 1{,}15} \cong \frac{1{,}83}{0{,}14} \approx 13{,}07$

tehát ekkor kb. 13 év múlva ez a bálna populáció eltűnik.

2) Fv. határérték, folytonosság, szakadási helyek, asszimptota

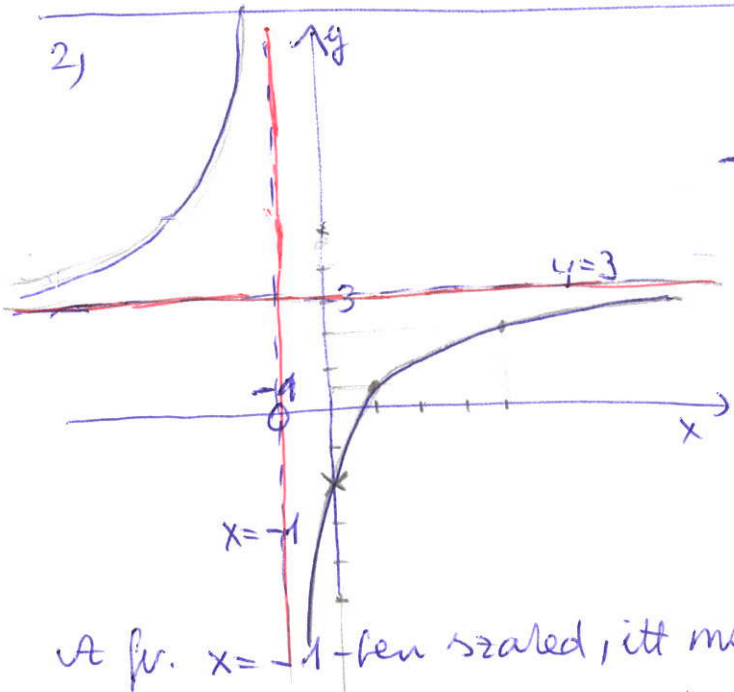
1) $\lim\limits_{0} \frac{1}{x^2} = +\infty$



$\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim\limits_{-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

A fv. $x=0$ pontban szakad, itt másodfajú szakadása van. A fv. függőleges asszimptotája az y tengely ($x=0$), vízszintes asszimptotája pedig az x-tengely ($y=0$).

2)



$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1} = \frac{3(x+1)-5}{(x+1)} = 3 - \frac{5}{x+1}$$

$-1 \neq x$, az ábráról leolvasható, hogy:

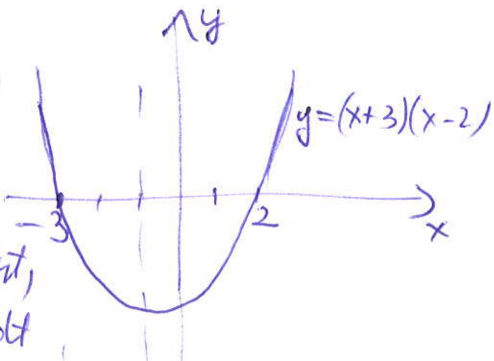
$$\lim_{-1+} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty \quad \left(= \frac{-5}{0+} = -\infty\right)$$

$$\lim_{-1-} \frac{3x-2}{x-1} = +\infty \quad \left(= \frac{-5}{0-} = +\infty\right)$$

$$\lim_{\pm\infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3 \quad \left(= \lim_{\infty} \frac{3 - \overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}}{1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = 3\right)$$

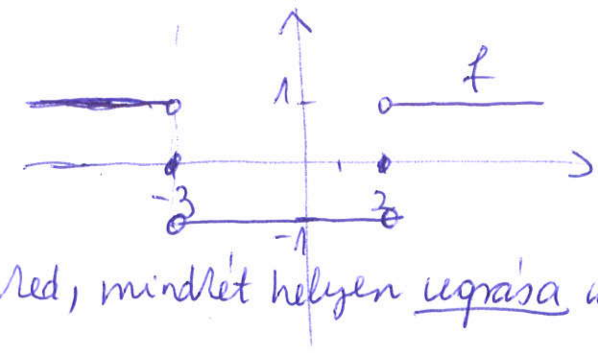
A fv. $x=-1$-ben szakad, itt másodfajú szakadása van. Vízszintes asszimptota az $y=3$ egyenes, függőleges asszimptota pedig az $x=-1$ egyenes.

3) $f(x) = \mathrm{sgn}(x^2+x-6) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x^2+x-6>0 \\ 0, & \text{ha } x^2+x-6=0 \\ -1, & \text{ha } x^2+x-6<0 \end{cases}$



$y = x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$ képe egy parabola: látható, hogy $x=-3$, $x=2$-ben metszi az x-tengelyt, $(-3,2)$ int.-ban negatív, egyébként pozitív, tehát

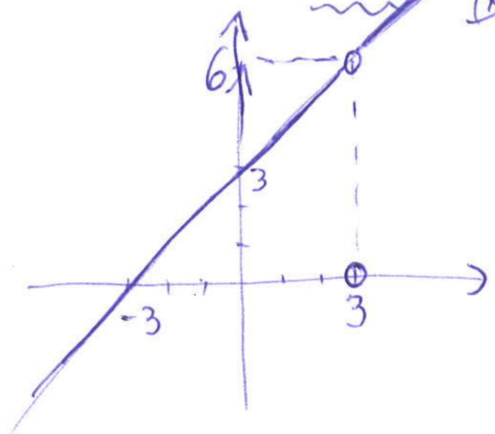
$$f = \mathrm{sgn}(x^2+x-6) = \begin{cases} +1, & x<-3 \text{ és } x>2 \\ 0, & x=-3,\ x=2 \\ -1, & -3<x<2 \end{cases}$$



Az f fv. $x=-3$ és $x=2$ pontokban szakad, mindkét helyen ugrása van.

④ $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, $x\neq 3$ azaz $\text{Ért} f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

ha $x\neq 3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}=x+3$



f képe egy "lukas" egyenes (az $y=x+3$)

f $x=3$-ban szakad, és itt megszüntethető szakadása van, mert

$$\lim_{3} f=\lim_{3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}=\lim_{3}(x+3)=6$$

Deriválás

a) $f'=(2x^2-3x+1)'=4x-3$, $f'=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)'=x^2-1$, $f'=(2x^5+4x^4-3x^3+2x^2-5x+6)'=$

$=10x^4+16x^3-9x^2+4x-5$, $f'=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-1\right)'=2x^3-2x^2+x$,

$f'=\left(4(x^2-3x+2)\right)'=4(2x-3)=8x-12$, $f'=\left(\frac{x^3-2x+4}{7}\right)'=\frac{1}{7}(3x^2-2)=\frac{3}{7}x^2-\frac{2}{7}$

$f'=\left(-\frac{1}{3}(3+x-x^4)\right)'=-\frac{1}{3}(1-4x^3)=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}x^3$

b) $f'=\left((2x-3)(3x+2)\right)'=(6x^2-5x-6)'=12x-5$

$f'=\left[(x^2-3x)(2x^2+x-3)\right]'=(2x^4-5x^3-6x^2+9x)'=8x^3-15x^2-12x+9$

$f'=\left(2x^3(3x^4+7x)\right)'=(6x^7+14x^4)'=42x^6+56x^3$

$f'=\left((3x-2)^2\right)'=2(3x-2)\cdot 3=6(3x-2)=18x-12$

$f'=\left((2x-3)^3\right)'=3(2x-3)^2\cdot 2=6(2x-3)^2=24x^2-72x+54$

$f'=\left((2-x)(2+x)^2\right)'=\left((4-x^2)(2+x)\right)'=(-2x^2+4x-x^3+8)'=-3x^2-4x+4$

$f'=\left((x-2)^2(1+3x^2)\right)'=2(x-2)(1+3x^2)+(x-2)^2\cdot 6x=2(x-2)(1+3x^2+\overset{3x^2-6x}{3x(x-2)})$

$=2(x-2)(6x^2-6x+1)=12x^3-36x^2+26x-4$

c) $f' = \left(\frac{3x^3-6x^2}{x}\right)' = 3\left(x^2-2x\right)' = \underline{6x-6}$

$f' = \left(\frac{5x^3+15x^2}{5x}\right)' = \left(x^2+3x\right)' = \underline{2x+3}$

$f' = \left(\frac{(2x-3)^4}{(2x-3)^2}\right)' = \left((2x-3)^2\right)' = 2(2x-3)\cdot 2 = 4(2x-3) = \underline{8x-12}$

$f' = \left(\frac{(3x-1)^3}{(9x-3)^2}\right)' = \left(\frac{(3x-1)^{\cancel{3}}}{9\cancel{(3x-1)^2}}\right)' = \frac{1}{9}\left(3x-1\right)' = \underline{\frac{1}{3}}$

$f' = \left(\frac{4-9x^2}{3x-2}\right)' = \left(\frac{\cancel{(2-3x)}(2+3x)}{-\cancel{(2-3x)}}\right)' = -\left(2+3x\right)' = \underline{-3}$

$f' = \left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)' = \left(\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}}\right)' = \underline{2x+2}$

$f' = \left(\frac{x^3-27}{x-3}\right)' = \left(\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}}\right)' = \underline{2x+3}$

---

d) $f' = \left(2\sin x + 4\cos x\right)' = 2\cos x - 4\sin x$, $f' = 5(3-\sin x+\cos x)' = 5(-\cos x - \sin x)$

$f' = \left(2x\cdot\cos x\cdot\sin x\right)' = \left(2x\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right)' = \sin 2x + 2x\cdot\cos 2x$, $f' = \left(3\sin^2 x\right)' = 6\sin x\cos x$

e) $f' = \left(\sqrt{3x} - \sqrt[3]{x^2}\right)' = 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$f' = \left(\sqrt[4]{3x^3} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt{2x^3}\right)' = \sqrt[4]{3}\cdot\left(x^{\frac{3}{4}}\right)' - \sqrt[3]{2}\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + \sqrt{2}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \sqrt[4]{3}\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} -$

$-\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{2}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt[4]{3}}{4\cdot\sqrt[4]{x}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{x}$

$f' = \left(3x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

$\lim_{+\infty}\frac{x^2}{e^x} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{+\infty}\frac{2x}{e^x} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{+\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$

$$\lim_{+\infty}\frac{x^{10}}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim_{+\infty}\frac{10\cdot x^9}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim_{+\infty}\frac{10\cdot 9\cdot x^8}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim_{+\infty}\frac{10\cdot 9\cdot 8 x^7}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim_{+\infty}\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot x^6}{e^x}$$

$$\dots=\lim_{+\infty}\frac{10!}{e^x}=\frac{10!}{+\infty}=0$$

$$\lim_{0}\frac{5^x-2^x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{0}\frac{5^x\ln 5-2^x\ln 2}{1}=\underline{\underline{\ln 5-\ln 2}}=\ln 2{,}5\approx 0{,}916$$

$$\lim_{0}\frac{e^{3x}-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{0}\frac{3e^{3x}}{1}=3\cdot e^0=3$$

$$\lim_{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{+\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$\lim_{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim_{+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

---

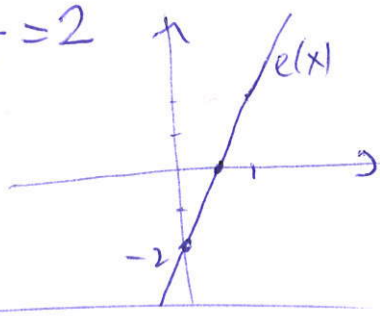
4. érintő egyenlet: $e(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

1. $\boxed{f(x)=(x^2+1)\ln x \,,\ x_0=1,\ \bar{x}=0{,}99}$ $\quad f(1)=2\cdot\ln 1=0$

$f'(x)=2x\cdot\ln x+(x^2+1)\cdot\frac{1}{x}$, $f'(1)=2\overset{0}{\ln 1}+\frac{2}{1}=2$

$e(x)=0+2(x-1)=2(x-1)$ érintő egyenlete

$f(0{,}99)\approx e(0{,}99)=2\cdot(0{,}99-1)=-0{,}02$

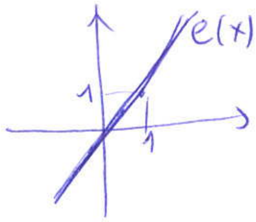


$\boxed{f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}} \,,\ x_0=0,\ \bar{x}=-0{,}01}$ $\quad f(0)=0\cdot e^0=0$

$$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot 2x\right)=e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$

$f'(0)=1$, $e(x)=0+1\cdot(x-0)=x$

$f(-0{,}01)\approx e(-0{,}01)=-0{,}01$



$\boxed{f(x)=x^{\frac{1}{4}} \,,\ x_0=9,\ \bar{x}=80}$ $\quad f(9)=\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$

$$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\ ,\ f'(9)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(\sqrt[4]{9})^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(\sqrt{3})^3}=\frac{1}{4\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{1}{12\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{36}}}$$

$e(x)=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{36}(x-9)$, $e(x)\approx 1{,}732+0{,}048(x-9)$

$f(80)\approx e(80)=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{36}71\cong 1{,}732+3{,}408=5{,}14$

megj: mivel $\bar{x}=80$ nincs közel az $x_0=9$-hez, ezért a közelítés nem jó, túl "durva"

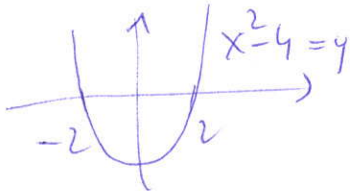
ha pl. $\bar{x}=8{,}0\Rightarrow e(8)=1{,}732-0{,}048=1{,}684$ már jó közelítés

$(\sqrt[4]{8}\approx 1{,}6817)$

② lokális szélsőérték helyek és értékek meghatározása

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ | 0.l. Ért $f=\mathbb{R}$, zh: $x\left(\frac{x^2}{4}-3\right)=0$ < $x=0$; $x^2=12$, $x\cong\pm 3{,}46$

1.l. $f'=\frac{3}{4}x^2-3=0=3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)$, $x^2-4=0$ < $x_1=-2$; $x_2=2$ lehetséges lok. sz. é. helyek



1. tábl.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
f' előjele	$+$	0	$-$	0	$+$
f mon.	$\nearrow$	l. max. hely	$\searrow$	l. min. hely	$\nearrow$

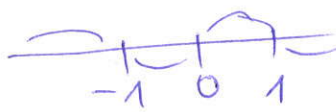
lok. max. érték: $f(-2)=\frac{1}{4}(-2)^3-3\cdot(-2)=-\frac{8}{4}+6=4$

lok. min. érték: $f(2)=\frac{1}{4}8-6=-4$

$f(x)=2x^2-x^4$ | 0.l. Ért $f=\mathbb{R}$, zh: $x^2(2-x^2)=0$ < $x=0$; $x=\pm\sqrt{2}$

1.l. $f'=4x-4x^3=4x(1-x^2)$

lehets. lok. sz. é. helyek: $4x(1-x)(1+x)=0$ < $x=0$; $x=-1$; $x=1$



1. tábl.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f' előjele	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f mon.	$\nearrow$	l. max. hely	$\searrow$	l. min	$\nearrow$	l. max.	$\searrow$

$f'(-2)=-8(-4)>0$

$f'(-\frac{1}{2})=-2(1-\frac{1}{4})<0$

$f'(\frac{1}{2})=2(1-\frac{1}{4})>0$

$f'(2)=8(1-4)<0$

$f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$

Tehát a fv. lok. maximumhelyei: $x=-1$, $x=1$, a lok. max. értékek: 1

" min. helye: $x=0$, a lok. min. érték: 0

$f(x)=x^4+x^3-4x^2$

$\boxed{0.\,l.}$ $\acute{E}tf=\mathbb{R}$

zh: $x^2\cdot(x^2+x-4)=0$ — $x=0$

$x_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$x_1\cong 1{,}56$, $x_2\cong 2{,}56$

$\boxed{1.\,l.}$ $f'=4x^3+3x^2-8x$

lehets. lok. sz. é. helyek: $x(4x^2+3x-8)=0$

$x^2+\frac{3}{4}x-2=0$ $\quad x_{1/2}=-\frac{3}{8}\pm\sqrt{\frac{9}{64}+2}=\frac{-3\pm\sqrt{137}}{8}\cong\frac{-3\pm 11{,}7}{8}$ — $1{,}0875\approx 1{,}09$; $-1{,}8375\approx -1{,}84$

$-1{,}84 \quad 0 \quad 1{,}09$

1. tábl.

x	$(-\infty\mid-1{,}84)$	$-1{,}84$	$(-1{,}84\mid 0)$	0	$(0\mid 1{,}09)$	$1{,}09$	$(1{,}09\mid+\infty)$
f' előjele	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f mon.	↘	lok. min. hely	↗	l. max. hely	↘	l. min. hely	↗

$f'(-2)=-2(16-6-8)<0$

$f'(-1)=-(4-3-8)$

$f'(1)=7-8<0$

$f'(2)=2(16+6-8)>0$

$f(-1{,}84)\cong 11{,}46-6{,}23-13{,}54=-8{,}31$ lok. min. érték

$f(0)=0$, $f(1{,}09)\cong 1{,}41+1{,}29-4{,}75=-2{,}05$ lok. min. érték

lok. max. érték

3) Teljes fv. vizsgálat

a) $f(x)=-4x^5+15x^3$

$\boxed{0.\,l.}$ $\acute{E}tf=\mathbb{R}$, zh: $x^3(15-4x^2)=0$ — $x=0$; $x=\pm\sqrt{\frac{15}{4}}\cong\pm 1{,}94$

$\boxed{1.\,l.}$ $f'(x)=-20x^4+45x^2=5x^2(9-4x^2)$

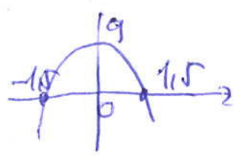
lehets. lok. sz. é. helyek: $5x^2(9-4x^2)=0$ — $x=0$; $x=\frac{3}{2}$, $x=-\frac{3}{2}$

$-1{,}5 \quad 0 \quad 1{,}5$

1. tábl.

x	$(-\infty\mid-1{,}5)$	$-1{,}5$	$(-1{,}5\mid 0)$	0	$(0\mid 1{,}5)$	$1{,}5$	$(1{,}5\mid+\infty)$
f' előjele	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
f mon.	↘	l. min. hely	↗		↗	l. max. hely	↘

f' előjele csak $y=(9-4x^2)$-től függ



$f(-1{,}5)=30{,}375-50{,}625=-20{,}25$ lok. min. érték

$f(1{,}5)=-30{,}375+50{,}625=20{,}25$ lok. max. érték

$\boxed{2.\,lépés}$ $f''=(-20x^4+45x^2)'=-80x^3+90x=10x(9-8x^2)$

lehets. inflexiós helyek: $10x(9-8x^2)=0$, $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{9}{8}}\cong\pm 1{,}06$

$-1{,}06 \quad 0 \quad 1{,}06$

2. tábl.

x	$(-\infty\mid-1{,}06)$	$-1{,}06$	$(-1{,}06\mid 0)$	0	$(0\mid 1{,}06)$	$1{,}06$	$(1{,}06\mid+\infty)$
f'' előjele	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f görb.	◡	infl.	⌒	infl.	◡	infl.	⌒

$f''(-2)=640-180>0$

$f''(-1)=80-90<0$

$f''(1)=-80+90>0$

$f''(2)=-640+180<0$

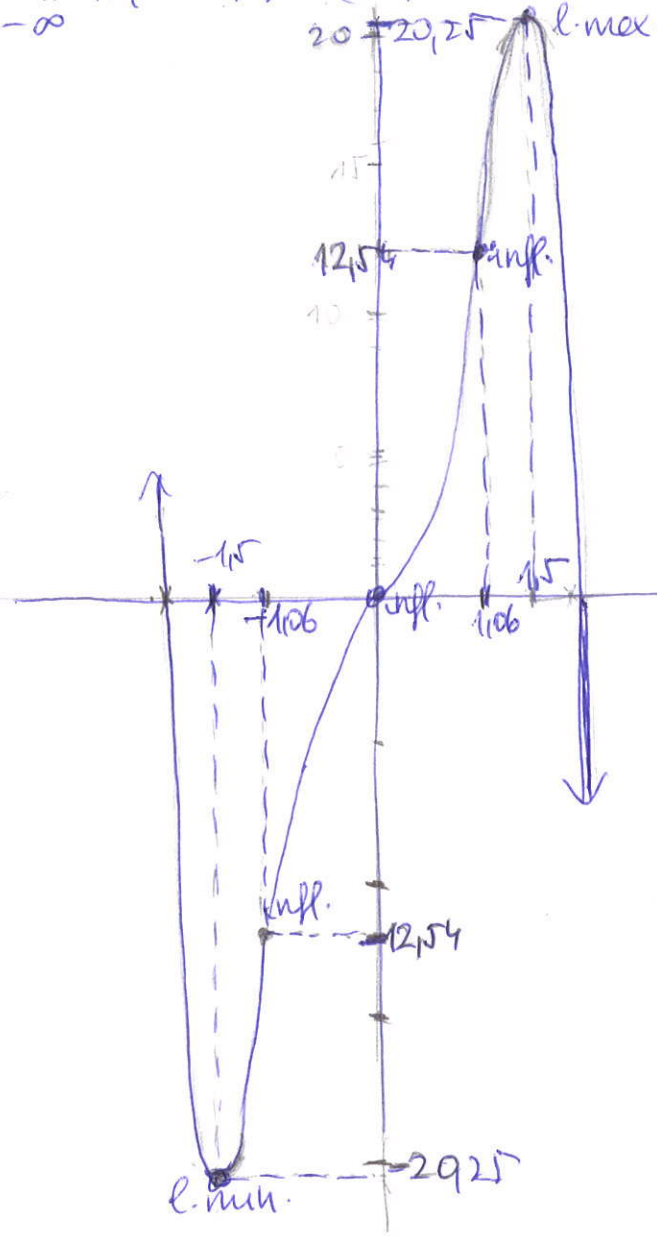
$f(0)=0$

$f(-1{,}06)\cong 5{,}32-17{,}86=-12{,}54$

$f(1{,}06)=-5{,}32+17{,}86=12{,}54$

3.l. $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} x^3(15-4x^2) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

$\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} x^3(15-4x^2) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$



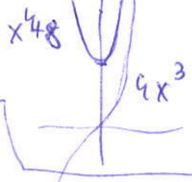
f képe

f szimmetrikus az origóra, azaz páratlan fv. $(f(x) = -f(-x))$

b) $f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 4x^3 + 8)$

0.l. É.t f = ℝ, zh: csak közelítőleg tudjuk

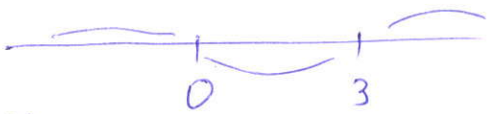
$x^4 + 8 = 4x^3$



pl. $x = 4$
$264 \geq 256$
kb. itt lehet a gyök

1.l. $f' = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2(x-3)$

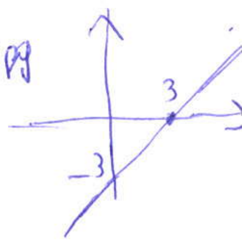
lehets. lok. sz.é. helyek: $\underbrace{x^2}_{\geq 0}(x-3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$



1. tábl.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
f' előjele	−	0	−	0	+
f mon.	↘		↘	l.min. hely	↗

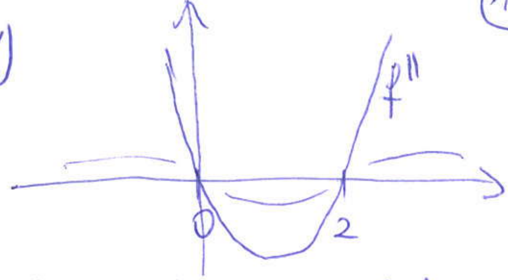
f' előjele csak $y = (x-3)$-tól függ



$f(3) = \frac{1}{8}(81 - 108 + 8) = \frac{-19}{8} = -2{,}375$

2.l. $f''=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)'=\frac{3}{2}x^2-3x=3x\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

lehets. infl. helyek: $x\left(\frac{1}{2}x-1\right)=0$ $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$



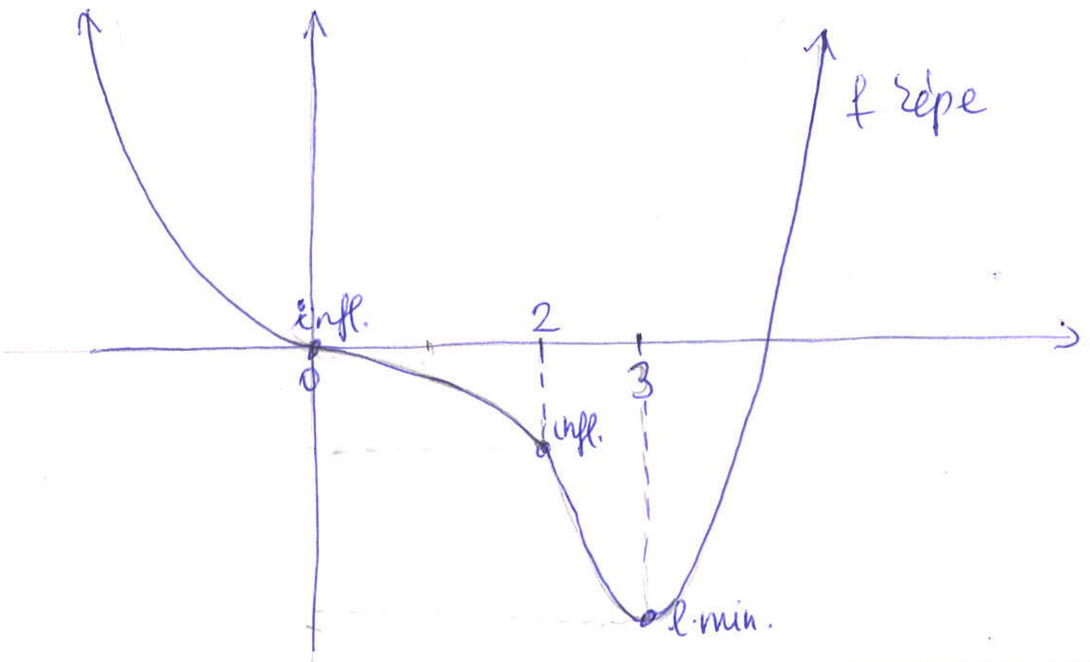
2. tábl.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'' előjele	+	0	−	0	+
f görb.	∪	infl.	∩	infl.	∪

$f''=3x\left(\frac{1}{2}x-1\right)$ képe egy parabola

$f(0)=1$, $f(2)=\frac{1}{8}(16-32+8)=-1$

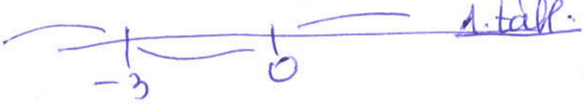
3.l. $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{8}\{\underbrace{(x-4)}_{+\infty}\underbrace{x^3}_{+\infty}+8\}=+\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{-\infty}\left\{\underbrace{\left(\frac{x-4}{8}\right)}_{-\infty}\underbrace{x^3}_{-\infty}+1\right\}=+\infty$



5) $f(x)=x^3+\frac{x^4}{4}$

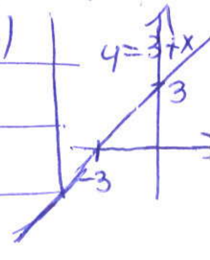
0.l. $\text{Ét} f=\mathbb{R}$, zh: $x^3\left(1+\frac{x}{4}\right)=0$ $\begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$

1.l. $f'=3x^2+x^3=\underbrace{x^2}_{\geq 0}(3+x)$, lehets. lok. sz.é. helyek: $x=0$, $x=-3$



1. tábl.

	$(-\infty,-3)$	−3	$(-3,0)$	0	$(0,+\infty)$
f' előjele	−	0	+	0	+
f mon.	↘	l.min. hely	↗		↗



(f' előjele csak $y=(3+x)$ -től függ)

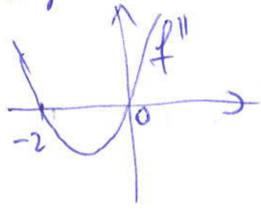
$f(-3)=-27+\frac{81}{4}=-6{,}75$ l.min érték

2.l. $f''=6x+3x^2=3x(2+x)$, lehets. infl. helyek: $x(2+x)=0$, $x=0$, $x=-2$

2. tábl.

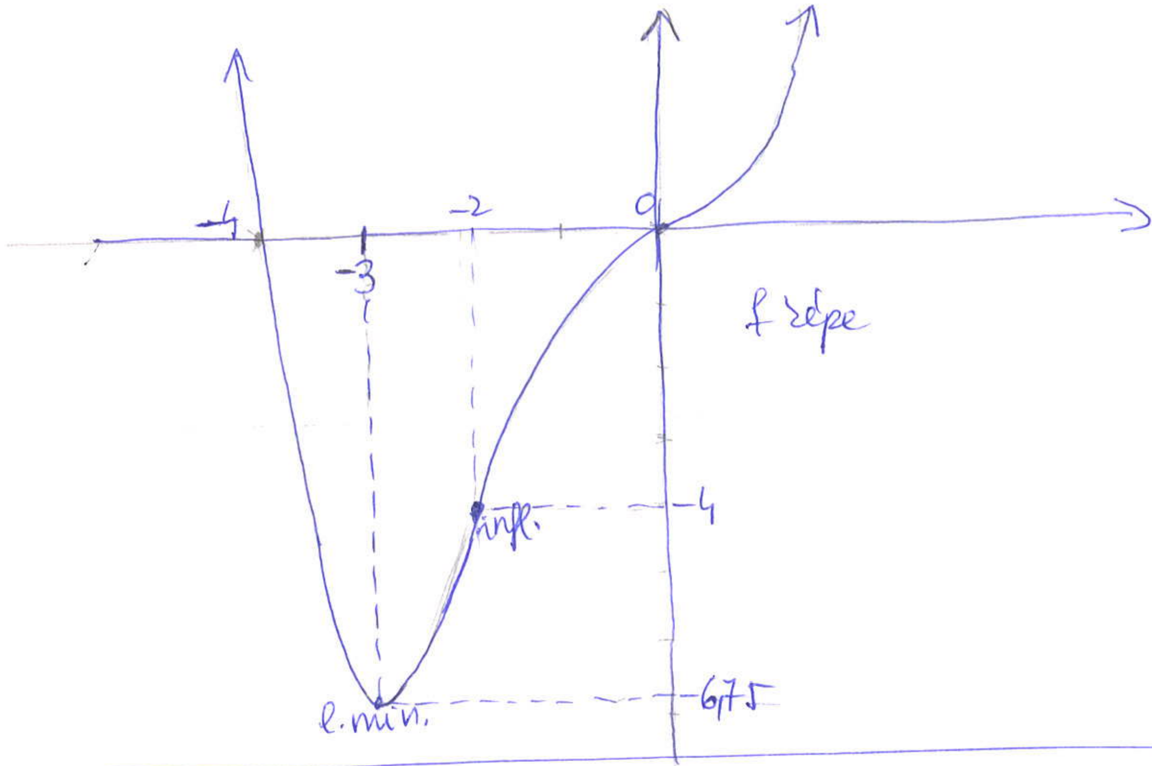
	$(-\infty,-2)$	−2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'' előjele	+	0	−	0	+
f görb.	∪	infl.	∩	infl.	∪

$f(0)=0$



$f(-2)=-8+4=-4$

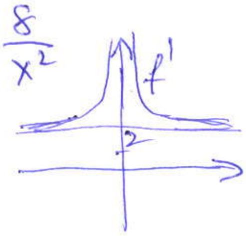
$\boxed{3.l.}$ $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} x^3\left(1+\frac{x}{4}\right) = +\infty$, $\lim_{-\infty} \underbrace{x^3}_{-\infty}\underbrace{\left(1+\frac{x}{4}\right)}_{-\infty} = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$



d) $f(x)=\dfrac{2x^2-8}{x}$

$\boxed{0.l.}$ $x\neq 0$, zh: $x^2=4$, $x=-2$, $x=+2$

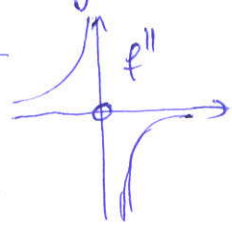
$\boxed{1.l.}$ $f'(x)=\dfrac{4x\cdot x-(2x^2-8)}{x^2}=\dfrac{2x^2+8}{x^2}=2+\dfrac{8}{x^2}$



lok. sz. é. hely nincs, mivel $f'(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

tehát f szig. mon. nő $\mathbb{R}\setminus\{0\}$-n. (1. tábl. elhagyható)

$\boxed{2.l.}$ $f''=-\dfrac{16}{x^3}$, $f''\neq 0$ ha $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, így nincs inflexiós hely



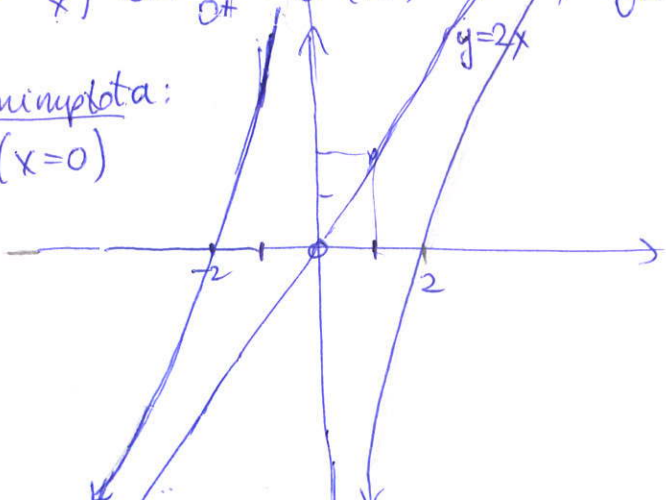
2. tábl.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'' előjele	+	$\nexists$	−
f görb.	☺		☹

$\boxed{3.l.}$ $\lim_{+\infty} f=+\infty$, $\lim_{-\infty}\left(\underbrace{2x}_{-\infty}-\underbrace{\frac{8}{x}}_{0}\right)=-\infty$

$\lim_{0+}\left(2x-\frac{8}{x}\right)=0-\frac{8}{0+}=0-(+\infty)=-\infty$, $\lim_{0-}\left(2x-\frac{8}{x}\right)=0-\frac{8}{0-}=-(-\infty)=+\infty$

függőleges aszimptota:
y-tengely $(x=0)$



* ferde aszimptota: $y=mx+b$

$m:=\lim_{\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\pm\infty}\frac{2x^2-8}{x^2}=\underline{\underline{2}}$

$b:=\lim_{\pm\infty}(f(x)-2x)=\lim_{\pm\infty}\left(\frac{2x^2-8}{x}-2x\right)=$

$=\lim_{\pm\infty}\frac{\cancel{2x^2}-8-\cancel{2x^2}}{x}=\frac{-8}{\pm\infty}=0$

$\underline{y=2x \text{ ferde aszimptota}}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^3}$ $\boxed{0.\ l.}$ $x\neq 0$, zh: $x=-3$, $x=3$

$\boxed{1.\ l.}$ $f' = \dfrac{2x\cdot x^3-3x^2(x^2-9)}{x^6} = \dfrac{\cancel{x^2}(2x^2-3x^2+27)}{x^{\cancel{6}4}} = \dfrac{27-x^2}{x^4}$, $x^4>0$

lehets. lok. sz. é. helyek:

$27=x^2$, $x\cong 5,2$, $x\cong -5,2$

$(x=\pm 3\sqrt{3})$

$-3\sqrt3$ 0 $3\sqrt3$

1. tábl.

	$(-\infty\mid-5,2)$	$-3\sqrt3$	$(-3\sqrt3,0)$	0	$(0,3\sqrt3)$	$3\sqrt3$	$(3\sqrt3,+\infty)$
f' előjele	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f mon.	$\searrow$	l. min.	$\nearrow$		$\nearrow$	l. max.	$\searrow$

f' előjele csak $y=27-x^2$ -től függ

$-3\sqrt3$ 0 $3\sqrt3$ f'

$f(3\sqrt3) = \dfrac{27-9}{27\cdot 3\sqrt3} \cong 0,13$ $\quad f(-3\sqrt3) \cong \dfrac{27-9}{-140,6} \cong -0,13$

$\boxed{2.\ l.}$ $f'' = \left(\dfrac{27-x^2}{x^4}\right)' = \dfrac{(-2x)\cdot x^4-4x^3\cdot(27-x^2)}{x^8} = \dfrac{2\cancel{x^3}(-x^2-54+2x^2)}{x^{\cancel{8}5}} = \dfrac{2(x^2-54)}{x^5}$

lehets. infl. helyek: $x^2=54$, $x=\pm 3\sqrt6 \approx \pm 2,45\cdot 3 = \pm 7,35$

$-7,35$ 0 $7,35$

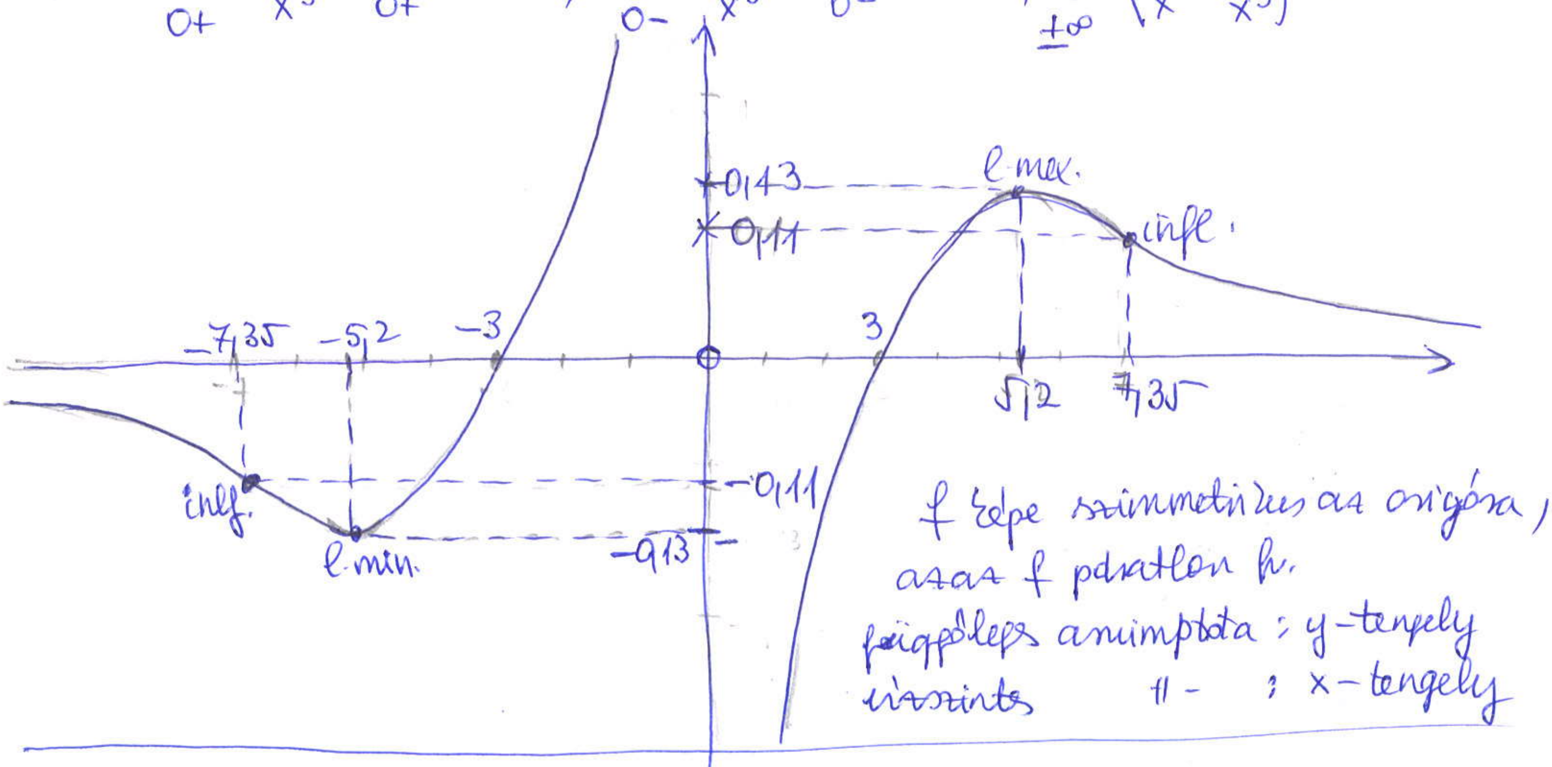
2. tábl.

	$(-\infty\mid-7,35)$	$-7,35$	$(-7,35\mid 0)$	0	$(0\mid 7,35)$	$7,35$	$(7,35\mid+\infty)$
f'' előjele	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f görb.	☹	infl.	☺		☹	infl.	☺

(f'' előjele csak $y=\dfrac{x^2-54}{x}$ -től függ) $f''(-8)=\dfrac{64-54}{-8}<0$, $f''(-1)=\dfrac{1-54}{-1}>0$, $f''(1)=\dfrac{-53}{1}<0$

$f''(8)=\dfrac{64-54}{8}>0$. $\quad f(-7,35)\approx\dfrac{54-9}{-397}\cong -0,11$, $f(7,35)\approx\dfrac{54-9}{397}=0,11$

$\boxed{3.\ l.}$ $\lim\limits_{0+}\dfrac{x^2-9}{x^3}=\dfrac{-9}{0+}=-\infty$, $\lim\limits_{0-}\dfrac{x^2-9}{x^3}=\dfrac{-9}{0-}=+\infty$, $\lim\limits_{\pm\infty}\left(\dfrac1x-\dfrac{9}{x^3}\right)=0$



f képe szimmetrikus az origóra, azaz f páratlan fv.

függőleges aszimptota: y-tengely

vízszintes 〃 : x-tengely

(f) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$ | $\boxed{0.l.}$ $x\neq 2$, zh: $x=0$

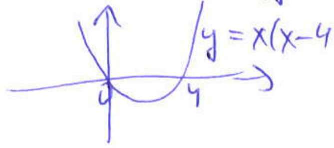
$\boxed{1.l.}$ $f'=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$, $(x-2)^2>0$ lehets. lok. sz. él. helye

$x(x-4)=0$, $x=0$, $x=4$

1. tábl.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,+\infty)$
f' előjele	+	0	−	∄	−	0	+
f mon.	↗	l. max	↘		↘	l. min.	↗

f' előjele csak $y=x(x-4)$-től függ



$f(0)=0$, lok. max érték

$f(4)=8$ lok. min. érték

$\boxed{2.l.}$ $f''=\left(\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^{4\,3}}=\frac{2(x-2)^2-2(x^2-4x)}{(x-2)^3}=$

$=\frac{2[\cancel{x^2}-\cancel{4x}+4-\cancel{x^2}+\cancel{4x}]}{(x-2)^3}=\frac{8}{(x-2)^3}$

nincs infl. hely, mivel $f''\neq 0$

2. tábl.

	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'' előjele	−	∄	+
f görb.	☹		☺

$f''(1)=\frac{8}{-1}<0$

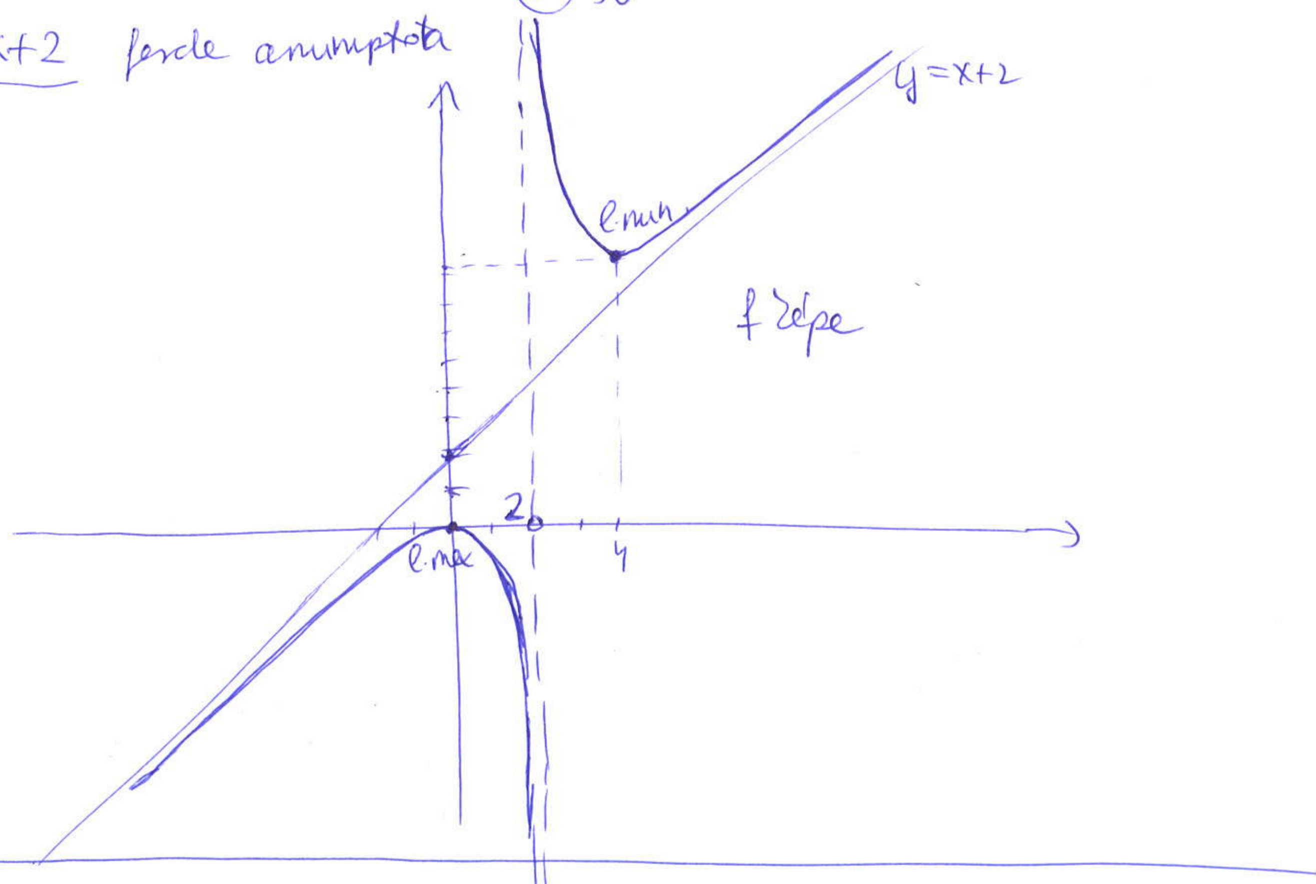
$f''(3)=\frac{8}{1}>0$

$\boxed{3.l.}$ $\lim_{2+}\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{0+}=+\infty$, $\lim_{2-}\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{0-}=-\infty$, $\lim_{\pm\infty}\frac{x^2}{x-2}=\lim_{\pm\infty}\frac{x}{1-\frac{2}{x}}=\pm\infty$, $\frac{2}{x}\to 0$

ferde aszimptota: $y=mx+b$

$m=\lim_{\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=\lim_{\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}}=1$, $\frac{2}{x}\to 0$, $b=\lim_{\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+2x}{x-2}=2$

$y=x+2$ ferde aszimptota



⑨ $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

0.l. $\text{É}t\,f=\mathbb{R}$, zh: nincs, mivel $e^{-\frac{x^2}{2}}>0,\ \forall x$

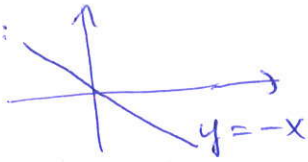
1.l. $f'=-x\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{>0}$, lehets. lok. sz. é. hely: $x=0$

1. tábl.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
f' előjele	$+$	0	$-$
f mon.	↗	l. max	↘

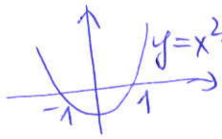
$f(0)=1$

f' előjele csak $y=-x$-től függ:



2.l.
$$f''=\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)'=-e^{-\frac{x^2}{2}}-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{>0}(x^2-1)$$
, lehets. infl. helyek: $x=-1,\ x=1$

f'' előjele csak $y=x^2-1$-től függ



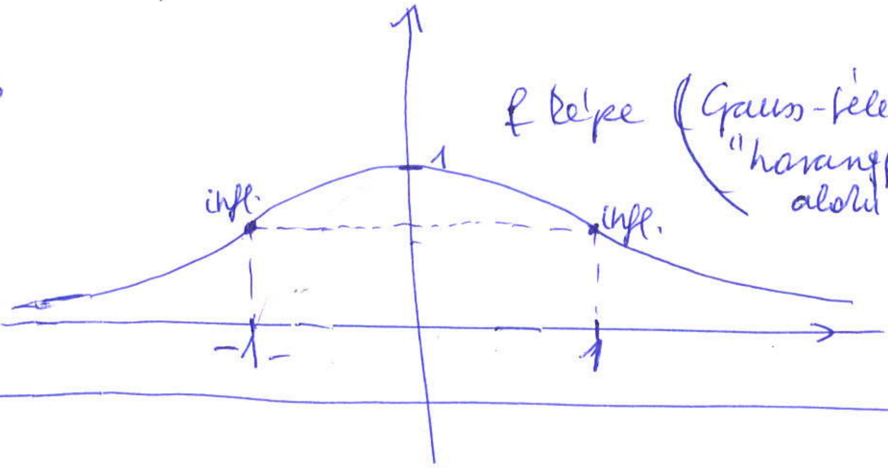
2. tábl.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'' előjele	$+$	0	$-$	0	$+$
f görb.	☺	infl.	☹	infl.	☺

$f(-1)=e^{-\frac{1}{2}}=f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}\cong 0{,}6$

3.l. $\lim\limits_{\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\infty}=0$

f képe (Gauss-féle "harangörbe" alakú)



Integrál

$$\int\left(12x^5+5x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{5}}+3\cdot x^{-4}+2\cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)=12\cdot\frac{x^6}{6}+5\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}+3\cdot\frac{x^{-3}}{-3}+2\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=$$
$$=2\cdot x^6+2\cdot x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}-\frac{1}{x^3}+3\cdot x^{\frac{2}{3}}+c$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+e^x+2^{x+1}+2\cdot\sin x\right)=\ln x+e^x+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+2\cdot(-\cos x)+c$$

$$\int\left(\frac{2x^3}{x\sqrt{x}}+e^{3x}\cdot e^{-x-1}+2\cos 3x\right)=\int 2\cdot x^{1,5}+\int e^{2x-1}+2\cdot\int\cos 3x=2\,\frac{x^{2,5}}{2,5}+\frac{e^{2x-1}}{2}+$$
$$+2\cdot\frac{\sin 3x}{3}+c$$

$$\int\left(\frac{x^5+3x^2-2x}{x}+\frac{x^2-4}{x+2}+3\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)+(x+1)^{10}\right)=\int x^4+3\int x-2\int 1+\int(x-2)+$$
$$+3\int(x^2+x+1)+\int(x+1)^{10}=\frac{x^5}{5}+\frac{3x^2}{2}-2x+\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{3x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{(x+1)^{11}}{11}+c$$

$$\int\left[(2x+1)^7-5(x-3)^{-3}+x^{-3}+2x^{\frac32}+(x+2)^{\frac43}\right]=\frac{(2x+1)^8}{8\cdot2}-5\cdot\frac{(x-3)^{-2}}{-2}+\frac{x^{-2}}{-2}+$$

$$+2\cdot\frac{x^{\frac52}}{\frac52}+\frac{(x+2)^{\frac73}}{\frac73}=\frac{1}{16}(2x+1)^8+\frac52\cdot\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{1}{2x^2}+\frac45x^2\cdot\sqrt{x}+c$$

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{2x+3}}+\frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}+\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}+\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\right)=3\int(2x+3)^{-\frac12}+2\cdot\int(x+1)^{-\frac23}+\int(x+1)^{\frac12}+$$

$$+\int(x+1)^{-\frac12}=3\cdot(2x+3)^{\frac12}\cdot2+2\cdot(x+1)^{\frac13}\cdot3+(x+1)^{\frac32}\cdot\frac23+(x+1)^{\frac12}\cdot2+c=$$

$$=6\sqrt{2x+3}+6\sqrt[3]{x+1}+\frac23\cdot\sqrt{(x+1)^3}+2\sqrt{x+1}+c$$

Határozott integrál

$$\int_0^1 2x^2=2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac23$$

$$\int_0^1(2+4x^2)=\left[2x+\frac{4x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}=2+\frac43=3\frac13\approx3{,}33$$

$$\int_0^2\left(\sqrt{9x}+\frac{x^2}{3}+e^{2x}\right)=\int_0^2\left(3\cdot x^{\frac12}+\frac13x^2+e^{2x}\right)=\left[3\cdot\frac{x^{\frac32}}{\frac32}+\frac13\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{e^{2x}}{2}\right]_{x=0}^{x=2}=$$

$$=\left[2x^{\frac32}+\frac19x^3+\frac12e^{2x}\right]_{x=0}^{x=2}=\left(2\cdot2^{\frac32}+\frac19\cdot8+\frac12e^4\right)-\frac12e^0=4\sqrt2+\frac89+\frac12e^4-\frac12\approx$$

$$\approx5{,}66+0{,}89+27{,}37-0{,}5=33{,}42$$

$$\int_2^4\left(\frac{x^2+x}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\int_2^4\left(\frac12x+\frac12+x^{-2}-2\cdot x^{-\frac12}\right)=\left[\frac12\cdot\frac{x^2}{2}+\frac12x+\frac{x^{-1}}{-1}-2\cdot\frac{x^{\frac12}}{\frac12}\right]_{x=2}^{x=4}=$$

$$=\left[\frac14x^2+\frac12x-\frac1x-4\sqrt{x}\right]_{x=2}^{x=4}\cong\Big(\underbrace{\overset{4}{\frac{16}{4}}+\overset{2}{\frac{4}{2}}-\frac14-8}_{-2{,}25}\Big)-\Big(\underbrace{\frac14\cdot4+1-\frac12-4\sqrt2}_{-4{,}16}\Big)\cong1{,}91$$

$$\int_1^2\left(\sqrt{x}+3\cdot2^{x-1}\right)=\left[\frac{x^{\frac32}}{\frac32}+3\cdot\frac{2^{x-1}}{\ln2}\right]_{x=1}^{x=2}=\left(\frac23\cdot2\sqrt2+\frac{6}{\ln2}\right)-\left(\frac23+\frac{3}{\ln2}\right)=$$

$$=\frac23(2\sqrt2-1)+\frac{3}{\ln2}\approx1{,}22+4{,}33=5{,}55$$

$$\int_0^3\frac{x^2\cdot e^x+2x^3}{x^2}=\int_0^3(e^x+2x)=\left[e^x+x^2\right]_{x=0}^{x=3}=(e^3+9)-e^0=e^3+8\cong28{,}12$$

$$\int_{-3}^{-1}\left(\frac{4x+1}{x^3}\right)=\int_{-3}^{-1}\left(4\cdot x^{-2}+x^{-3}\right)=\left[4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{x=-3}^{x=-1}=\left[-\frac4x-\frac{1}{2x^2}\right]_{x=-3}^{x=-1}=\overbrace{\left(4-\frac12\right)}^{3{,}5}-\overbrace{\left(\frac43-\frac{1}{18}\right)}^{1{,}28}\approx$$

$$\approx2{,}22$$

$$\int_1^2 \left(2+3\cdot x^{-2}+3^x\right) = \left[2x+3\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{3^x}{\ln 3}\right]_{x=1}^{x=2} = \left[2x-\frac{3}{x}+\frac{3^x}{\ln 3}\right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$=\left(4-\frac{3}{2}+\frac{3^2}{\ln 3}\right)-\left(2-3+\frac{3}{\ln 3}\right) = 3{,}5+\frac{6}{\ln 3} \approx \underline{\underline{8{,}96}}$$

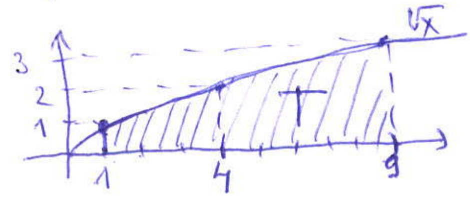
$$\int_0^{\pi} \sin x = \left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=\pi} = (-\cos\pi)-(-\cos 0) = -(-1)-(-1) = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x = \left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=2\pi} = (-\cos 2\pi)-(-\cos 0) = -1+1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x = \left[\sin x\right]_{x=0}^{x=\frac{3\pi}{2}} = \sin 270^\circ - \sin 0^\circ = -1-0 = \underline{\underline{-1}}$$

Területmutatás

a) $f=\sqrt{x}$, $x\in[1,9]$



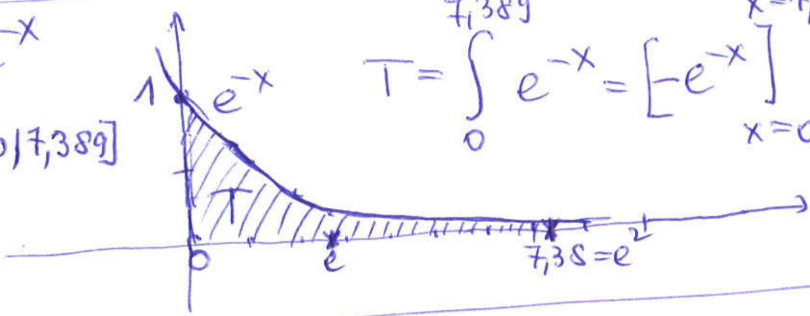
$$T=\int_1^9 x^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{x=1}^{9=x} = \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3\right]_{x=1}^{x=9} = \frac{2}{3}\cdot 27-\frac{2}{3} =$$

$$=26\cdot\frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{52}{3}}} \approx \underline{\underline{17{,}3\dot{3}}}$$

---

b) $f(x)=e^{-x}$

$x\in[0,e^2]\cong[0;7{,}389]$

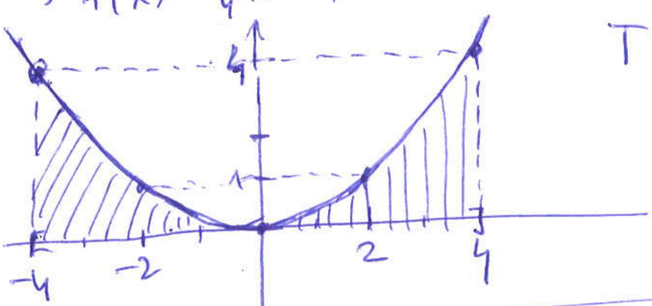


$$T=\int_0^{7{,}389} e^{-x} = \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x=7{,}389} \cong -0{,}006-(-\overset{1}{e^0}) =$$

$$=1-0{,}006=\underline{\underline{0{,}994}}$$

---

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$, $x\in[-4,4]$



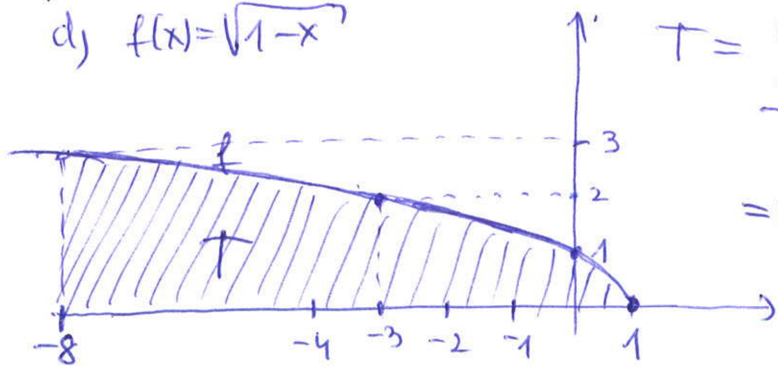
a szimmetria miatt:

$$T=2\cdot\int_0^4 \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=4} = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-0\right) = \frac{32}{3} \approx$$

$$\approx \underline{\underline{10{,}6\dot{6}}}$$

---

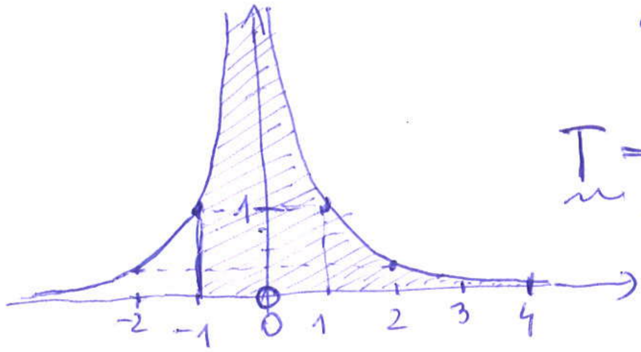
d) $f(x)=\sqrt{1-x}$



$$T=\int_{-8}^{1} (1-x)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot(-1)}\right]_{x=-8}^{x=1} = \left[-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3\right]_{x=-8}^{x=1} =$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\cdot 0\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 3^3 = \frac{2}{3}\cdot 3^3 = 2\cdot 3^2 = \underline{\underline{18}}$$

e)* $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\in[-1,4]$ ez improprius integrál, mivel $x \notin \mathrm{É.t.}f$ és $\lim\limits_{0} f=+\infty$



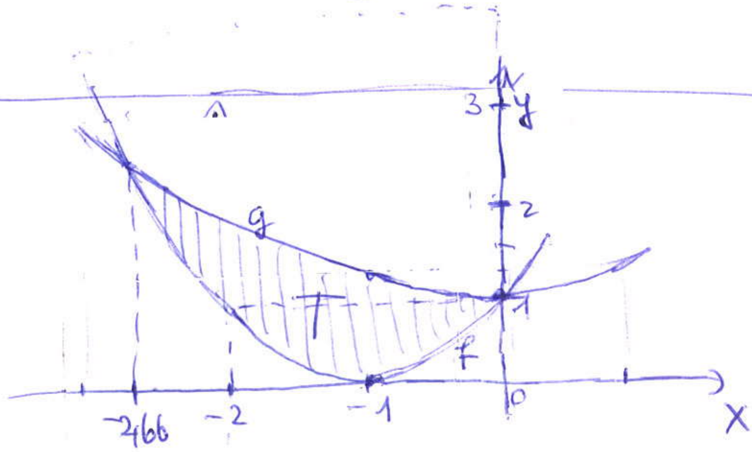
$$\underline{T}=\int_{-1}^{0}x^{-2}+\int_{0}^{4}x^{-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}x^{-2}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon}^{4}x^{-2}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{x=-1}^{x=-\varepsilon}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{x=\varepsilon}^{x=4}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{-\varepsilon}-\frac{-1}{-1}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{4}-\frac{-1}{\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{0+}+\frac{1}{0+}=$$

$$=\underline{+\infty}$$

<u>2 fv. gráfja közé eső tart. területe:</u>



a) $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$g(x)=\frac{1}{4}x^2+1$

metszéspontok: $x^2+2x+1=\frac{1}{4}x^2+1$

$x\left(\frac{3}{4}x+2\right)=\frac{3}{4}x^2+2x=0$

$x=0$, $x=-\frac{8}{3}\approx -2{,}6\dot{6}$

$f\le g$ ha $x\in[-2{,}66|0]$

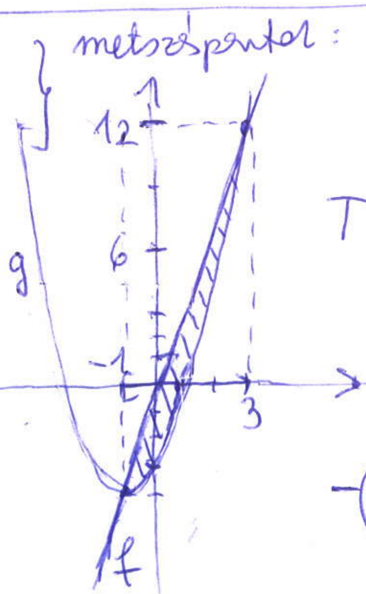
$$T=\int_{-2{,}66}^{0}\left[\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-\left(x^2+2x+1\right)\right]=\int_{-2{,}66}^{0}\left[-\frac{3}{4}x^2-2x\right]=\left[-\frac{\cancel{3}}{4}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}}-x^2\right]_{x=-2{,}66}^{x=0}=$$

$$\cong 0-\left(\underbrace{-\frac{1}{4}\cdot(-18{,}82)}-7{,}076\right)=-\left(\underbrace{4{,}705-7{,}076}_{-2{,}371}\right)=\underline{\underline{2{,}371}}$$

---

b) $f(x)=4x$
$g(x)=x^2+2x-3$ } metszéspontok: $4x=x^2+2x-3$

$x^2-2x-3=0=(x-3)(x+1)$ $\begin{cases}x=-1\\x=3\end{cases}$



$f\ge g$
ha $x\in[-1,3]$

$$T=\int_{-1}^{3}\left(4x-(x^2+2x-3)\right)=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{x=-1}^{x=3}=\left(\overbrace{-\frac{27}{3}}^{-9}+9+9\right)-$$

$$-\left(\underbrace{-\frac{-1}{3}+1-3}_{\frac{4}{3}-3=\frac{-5}{3}}\right)=9+\frac{5}{3}=\frac{32}{3}=\underline{\underline{10{,}6\dot{6}}}$$

---

c) $f(x)=2\sqrt{x}$

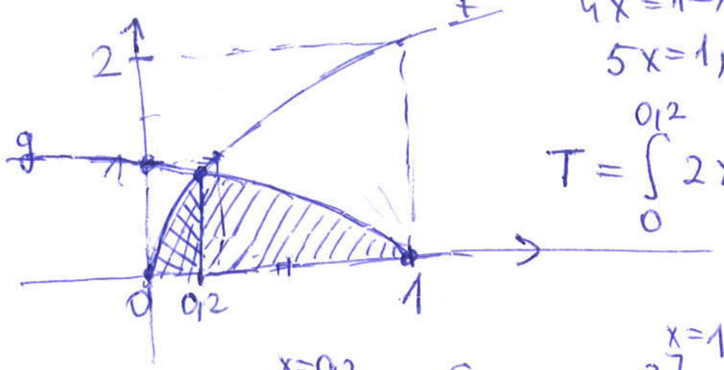
$g(x)=\sqrt{1-x}$

metszéspontok:

$2\sqrt{x}=\sqrt{1-x}$

$4x=1-x$

$5x=1,\quad x=\frac{1}{5}=0{,}2$



$$T=\int_0^{0,2}2x^{\frac{1}{2}}+\int_{0,2}^{1}(1-x)^{\frac{1}{2}}=\left[2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=0,2}+\left[\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right]_{x=0,2}^{x=1}$$

$$=\left[\frac{4}{3}(\sqrt{x})^3\right]_{x=0}^{x=0,2}+\left[-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})^3\right]_{x=0,2}^{x=1}\cong\frac{4}{3}\cdot 0{,}089+\left[0+\frac{2}{3}\cdot 0{,}72\right]\cong 0{,}12+0{,}48=$$

$$=\underline{0{,}6}$$

<u>Vége!</u>